

Вариант задания 1

Лист работы 1 из 4

1. меньший корень  $\frac{1}{3} \Rightarrow$  больший тоже  $\frac{1}{3}$ ,  
тогда:  $x_1, x_2 > \frac{1}{3}$ ,  $x_1 \neq x_2$

$$x^2 - x - a(a-1) = 0$$

По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - x_1 \\ x_1 \cdot x_2 = -a(a-1) \end{cases}$$

$$x_1 \cdot x_2 = -a(a-1)$$

$$x_1(1-x_1) = a(1-a)$$

$$x_1 - x_1^2 = a - a^2$$

$$a^2 - x_1^2 = a - x_1$$

$$(a-x_1)(a+x_1) = a-x_1$$

$$1) a-x_1=0 \Rightarrow a=x_1$$

$$a(a+x_1) > 0$$

$$\begin{cases} x_1 > \frac{1}{3} \\ 1-x_1 > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a > \frac{1}{3} \\ a < \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$a \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \text{ кроме } \frac{1}{2}$$

$$2) a-x_1 \neq 0$$

$$\begin{aligned} & x_1 \neq x_2 \\ & 2x_1 \neq 1 \Rightarrow a \neq 1-0,5=0,5 \end{aligned}$$



$$a + x_1 = 1$$

$$a = 1 - x_1 = x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \geq \frac{1}{3} \\ 1 - x_1 \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a \geq \frac{1}{3} \\ a \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \text{ исключая } \frac{1}{2}$$

$$\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 \neq 1 - x_1$$

Таким образом

Ответ: при  $a \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ .

2.

$$\sqrt{-|y-x|+1} \geq 0$$

Т.к.  $-|y-x|$  под корнем,  $-|y-x| \geq 0$

$|y-x| \leq 0$ , но т.к.  $|y-x|$  — модуль,  $|y-x| \geq 0 \Rightarrow$

$$|y-x| = 0$$

$$x = y$$

$$\left(-6 + \sqrt{37} + (\sqrt{3} + 2) \cdot \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\right) \cdot |x| + 5 - \sqrt{37} = 0$$

$$\left(-6 + \sqrt{37} + (\sqrt{3} + 2) \cdot \sqrt{2^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}\right) \cdot |x| = \sqrt{37} - 5$$

$$\left(-6 + \sqrt{37} + (2 + \sqrt{3}) \cdot |2 - \sqrt{3}|\right) \cdot |x| = \sqrt{37} - 5$$

$$2 > \sqrt{3}, \text{ т.к. } \sqrt{4} > \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\left(-6 + \sqrt{37} + (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})\right) \cdot |x| = \sqrt{37} - 5$$

$$(-6 + \sqrt{37} + 4 - 3) \cdot |x| = \sqrt{37} - 5$$

$$|x| = \frac{\sqrt{37} - 5}{\sqrt{37} - 5}$$

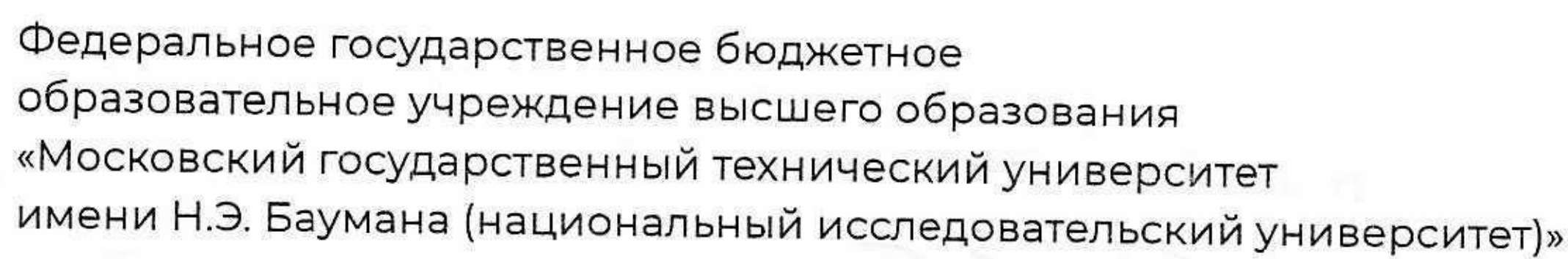
$$= 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$y = x = \pm 1$$

Ответ:  $(1, 1), (-1, -1)$ .



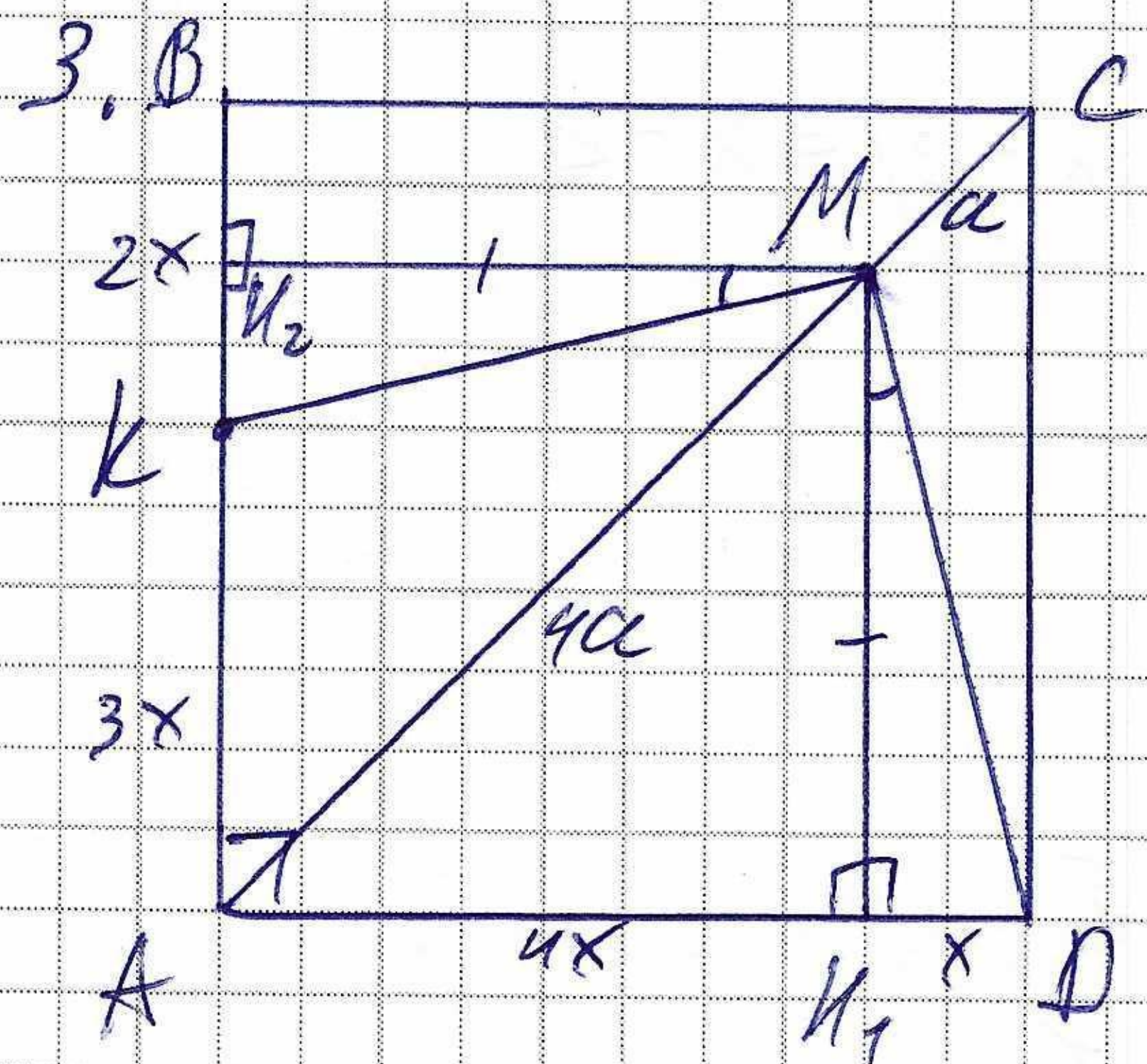




ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 7

Лист работы 2 из 4



Дако:

ABCD - квадрат

BK:  $AK = 2:3$

$$CM:AC = 1:5$$

$\angle KMP = ?$

$$CM:AC = 1:5 \Rightarrow CM:AM = 1:4$$

Следовательно высоты  $МК_1$  на  $AD$  и  $МК_2$  на  $AB$ :  
По теореме о пропорц. отрезках где  
угол  $\angle CAD$  и  $\angle BAC$   
 $AK_1 \quad AK_2 \quad AM \quad AK_1$

$$\frac{AK_1}{K_1D} = \frac{AK_2}{K_2B} = \frac{AM}{CM} = \frac{4a}{a} = 4$$

Т.к.  $ABCD$  - квадрат,  $AD = AB = 5x \Rightarrow$

$$AK_2 = AK_1 = 4x, \text{ da } KK_2 = K_1D = x$$

$\angle A = \angle AK_2, M = \angle AK_1, M = 90^\circ \Rightarrow AK_2, MK_1$  - перпендикуляры

как по прыжку,  $AK_2 = AK_1 = 4x \Rightarrow$

$\text{AlH}_2\text{MH}_4$  - ивадрат ко призмака  $\Rightarrow$

$$K_2 M = K_1 M, \text{ ~~тогда~~ } \Delta K K_2 M = \Delta \Phi K_1 M \text{ по}$$

II пр.  $\Rightarrow \angle KMK_2 = \angle DMK_1$ , а т.к.  $\angle K_2MK_1 = 90^\circ$ ,  
 $\angle KMD = 90^\circ - \angle KMK_2 + \angle DMK_1 = 90^\circ$ .

Ответ:  $\angle KMD = 90^\circ$ .





4.

$$2|x-2| - a - x = 2 \quad 0 \leq x < 5$$

это уравнение линейное  $\Rightarrow$  в нём будет максимум 1 корень

$$1) x \geq 2, \text{ тогда } x-2 \geq 0 \Rightarrow |x-2| = x-2$$

$$2 \leq x < 5$$

$$2(x-2) - a - x = 2$$

$$2x - 4 - a - x = 2$$

$$x = 6 + a \Rightarrow 2 \leq a + 6 < 5$$

$$-4 \leq a < -1$$

~~$a \geq 6$~~   
 ~~$a \geq 6$~~

$$2) x < 2, \text{ тогда } x-2 < 0 \Rightarrow |x-2| = 2-x$$

$$0 \leq x < 2$$

$$2(2-x) - a - x = 2$$

$$4 - 2x - a - x = 2$$

$$3x = 2 - a \Rightarrow 0 \leq \frac{2-a}{3} < 2$$

$$0 \leq 2-a < 6$$

$$0 \geq a - 2 \geq -6$$

$$2 \geq a \geq -4$$

Такие образы подпадают все

$$a \in [-4; -1) \cup (-4; 2]$$

$$a \in [-4; 2]$$

Ответ: при  $a \in [-4; 2]$ .





Вариант задания

1

Лист работы 3 из 4

6.

Пусть в огнестойкое сооружение поступает вода с процентом пришей  $= n\%$ , тогда за 1 цикл вода огнетается до процента пришей  $=$

$$n(100\% - 40\%)(100\% - 30\%)(100\% - 25\%)(100\% - 20\%) \\ = n \cdot 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,75 \cdot 0,8 = n \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 7,5 \cdot 8}{10000} =$$

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 1,5 \cdot 8 \cdot 5}{10 \cdot 1000} n = \frac{252}{1000} n.$$

Это значит, что за 1 цикл % пришей составит  $= \frac{56\% \cdot 252}{1000} = 14,112\%75\%$

за 2 цикла:

$$\frac{14,112\% \cdot 252}{1000} = 3,556224\% < 5\% \Rightarrow \text{покаго}$$

бится 2 цикла огнотки.

Если использовать дешёвое сооруже-  
ние (за 2800 тыс. руб), потребуется

$$\frac{5000 \text{ м}^3}{2800 \text{ руб}} \cdot 2 = 50 \text{ циклов}$$

с 15 мая по 15 сентября 4 месяца  $\Rightarrow$



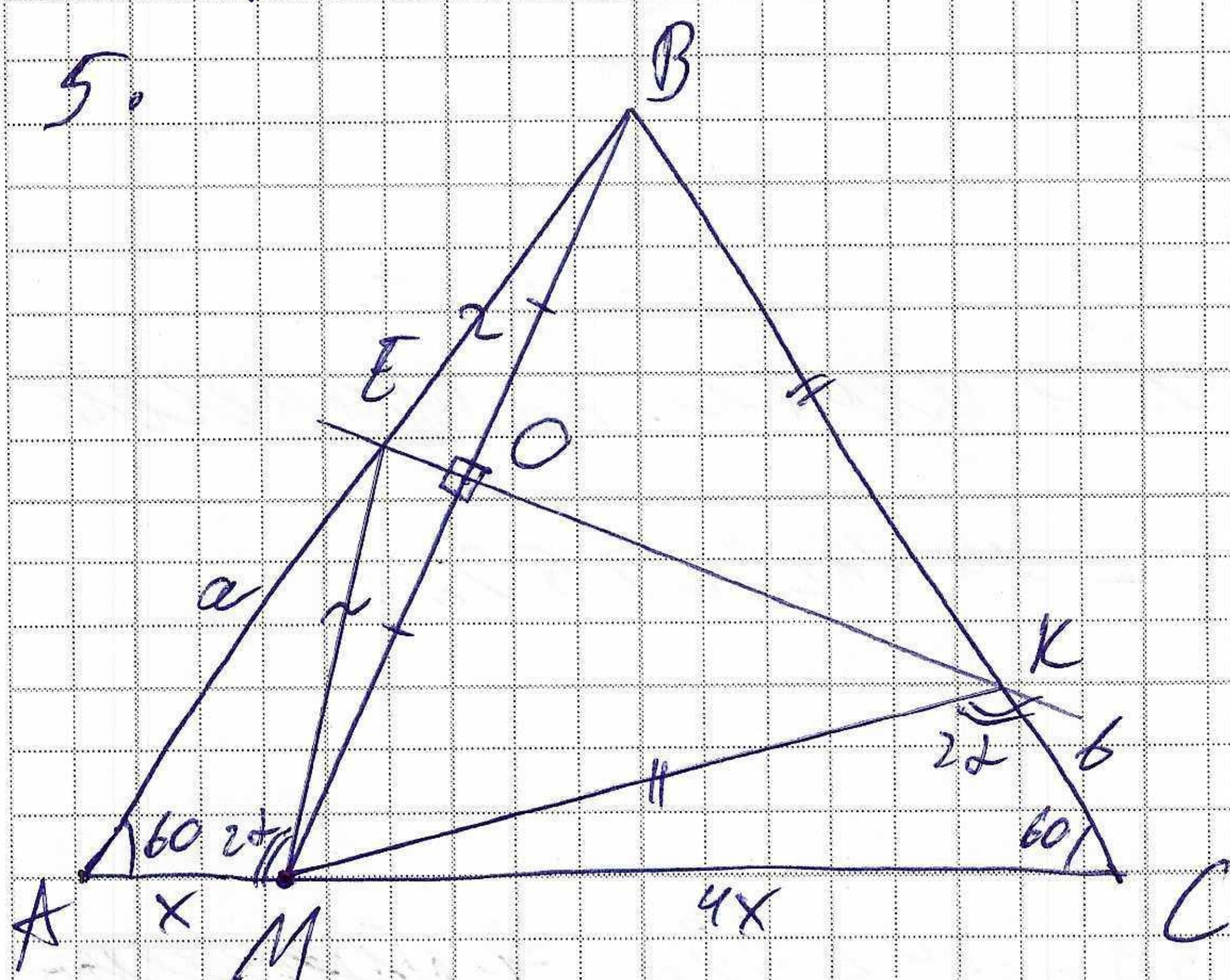


Затем  $30 \cdot 4 = 120$  дней, поэтому  
времени хватает.

~~В~~ В этом случае стоимость работы =  
 $2800 \text{ тыс. руб.} + (2+1) \text{ тыс. руб.} \cdot 50 \text{ сут.} = 2950 \text{ т.р.}$

Емк использовать дорожное соору-  
жение, придется потратить хотя бы  
 $6000 \text{ тыс. руб.} > 2950 \text{ тыс. руб.} \Rightarrow$

Ответ: выгоднее арендовать оштукое  
сооружение за  $2800 \text{ тыс. руб.}$  будет  
потрачено  $2950 \text{ тыс. руб.}$



Дано:

$\triangle ABC$  - равностор.

$AM:MC = 1:4$

$EK$  - сер. пер. к  $BM$

$\frac{S_{BEK}}{S_{ABC}} = ?$

Проведем  $EM$  и  $MK$ :

$\triangle BOE = \triangle MOE$ ,  $\triangle MOK = \triangle BOK$  по I тр  $\Rightarrow$   
 $ME = BE$ ,  $BK = MK$

$\triangle ABC$  - р/с  $\Rightarrow \angle A = \angle C = 60^\circ$ . Пусть  $\angle OBK = \alpha$ , тогда

$\angle BKC = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle MKC = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha$

$\angle EBC = 60^\circ - \alpha \Rightarrow \angle MEB = 2(90^\circ - (60^\circ - \alpha)) = 60^\circ + 2\alpha \Rightarrow$

$\angle AEM = 180^\circ - 60^\circ - 2\alpha = 120^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle AME = 180^\circ - 60^\circ -$





Вариант задания 1

Лист работы 4 из 4

$$\angle AME = 180^\circ - 60^\circ - (120^\circ - 2x) = 2x$$

$\triangle KCM \sim \triangle AME$  по 2 углам  $\Rightarrow$

$$\frac{AE}{AM} = \frac{CM}{CK}$$

Пусть  $AE = a$ ,  $CK = b$ , тогда:

$$\frac{a}{x} = \frac{4x}{b}$$

По теореме косинусов

$$EM^2 = AE^2 + AM^2 - 2 \cos(\angle A) \cdot AE \cdot AM$$

$$EM = \sqrt{a^2 + x^2 - \frac{ax}{2}}$$

$$AB = 5x = a + BE$$

$$5x - a = \sqrt{a^2 + x^2 - \frac{ax}{2}}$$

$$25x^2 - 10ax + a^2 = a^2 + x^2 - \frac{ax}{2}$$

$$25x - 10a = x - \frac{a}{2}$$

$$50x - 2x = 20a - a$$

$$a = \frac{48x}{19} \Rightarrow b = \frac{4x^2}{a} = \frac{4x^2 \cdot 19}{48x} = \frac{19}{12}x$$

$\angle B$  - общий для  $\triangle ABC$  и  $\triangle BEK \Rightarrow$

$$\frac{S_{BEK}}{S_{ABC}} = \frac{BE \cdot BK}{AB \cdot BC} = \frac{\left(5x - \frac{48x}{19}\right) \left(5x - \frac{19}{12}x\right)}{25x^2} = \frac{\frac{47}{19} \cdot \frac{41}{12}}{25} =$$

$$\frac{1927}{19 \cdot 12 \cdot 25} = \frac{1927}{5700}$$

Ответ:  $\frac{1927}{5700}$





$$a = \frac{48x}{18} = \frac{8x}{3} \Rightarrow b = \frac{4x^2}{a} = \frac{3 \cdot 4x^2}{x \cdot 8} = 1,5x$$

$\angle B$  — общий для  $\triangle ABC$  и  $\triangle BEK \Rightarrow$

$$\frac{S_{BEK}}{S_{ABC}} = \frac{BE \cdot BK}{AB \cdot BC} = \frac{\left(5x - \frac{8x}{3}\right) \left(5x - \frac{3x}{2}\right)}{25x^2} =$$

$$\frac{\frac{7}{3} \cdot \frac{7}{2}}{25} = \frac{49}{150}$$

Ответ: 49 к 150.